Álgebra II

Examen IV

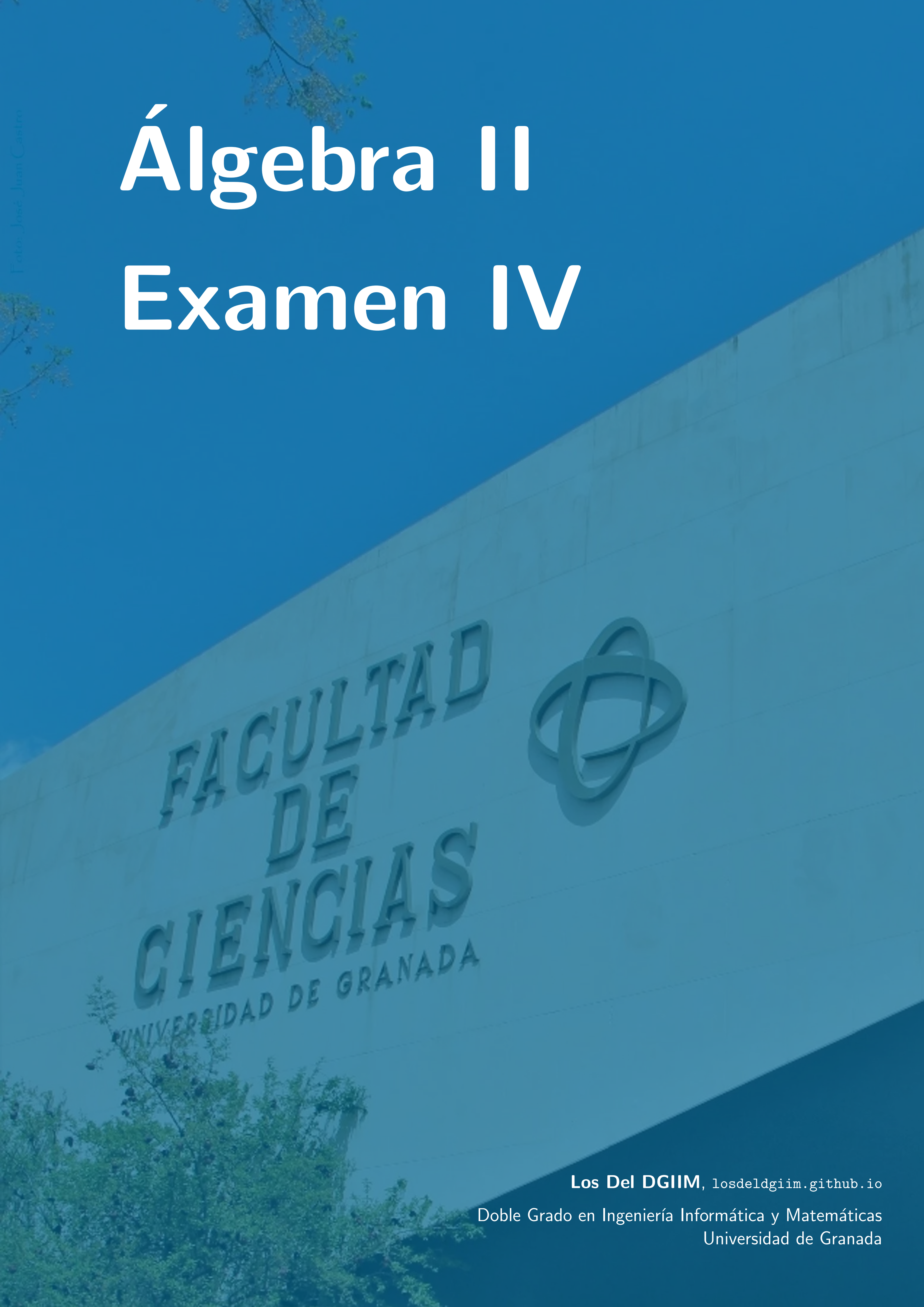

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Manuel Bullejos Lorenzo.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1.

1. (1 punto) Dado el grupo abeliano siguiente, calcula sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, el orden de A y el rango de su parte libre:

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 6x - 4y + 4z & = & 0 \\ 8x + 4y + 6z & = & 0 \\ 6x + 4y + 4z & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

2. (1 punto) Escribe las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias de todos los grupos abelianos de orden 108.

3. (1 punto) Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano $\mathrm{Aut}(C_{16})$.

Ejercicio 2.

1. (0,5 puntos) Sea $\alpha = (2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) \in S_5$. Calcula α^{123}.

2. (1,5 puntos) Calcula el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5.

Ejercicio 3.

1. (2 puntos) Demuestra que hay un único grupo de orden 885 que además es abeliano.

2. (1,5 puntos) Demuestra que todo grupo de orden 351 es un producto semidirecto.

3. (1,5 puntos) Calcula todos los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$. ¿Cuántos hay salvo isomorfismo?

Ejercicio 1.

1. (1 punto) Dado el grupo abeliano siguiente, calcula sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, el orden de A y el rango de su parte libre:

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 6x - 4y + 4z & = & 0 \\ 8x + 4y + 6z & = & 0 \\ 6x + 4y + 4z & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

Consideramos su matriz de relaciones:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos su forma normal de Smith:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1'=C_1-C_3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3'=F_3-F_1]{F_2'=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2'=C_2+2C_1]{C_3'=C_3-2C_1}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3'=C_3-4C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la forma normal de Smith de M es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tanto su descomposición cíclica como su descomposición cíclica primaria son:

$$A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_8$$

Como vemos, el orden de A es 32 y su parte libre tiene rango 0.

2. (1 punto) Escribe las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias de todos los grupos abelianos de orden 108.

Mostrado en la Tabla 1.

3. (1 punto) Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano $\mathrm{Aut}(C_{16})$.

Sea $C_{16} = \langle x \mid x^{16} = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden 16. Tenemos que:

$$|\,\mathrm{Aut}(C_{16})| = \varphi(16) = \varphi(2^4) = 1 \cdot 2^3 = 8$$

	Fact. Inv.	**Div. element.**	**Desc. cíclica primaria**	**Desc. cíclica**
$\begin{pmatrix} 2^2 \\ 3^3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 108$	$\{2^2; 3^3\}$	$C_4 \oplus C_{27}$	C_{108}
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3^3 & 1 \end{pmatrix}$	$d_1 = 54$ $d_2 = 2$	$\{2; 2; 3^3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_{27}$	$C_{54} \oplus C_2$
$\begin{pmatrix} 2^2 & 1 \\ 3^2 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 36$ $d_2 = 3$	$\{2^2; 3^2; 3\}$	$C_4 \oplus C_9 \oplus C_3$	$C_{36} \oplus C_3$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3^2 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 18$ $d_2 = 6$	$\{2; 2; 3^2; 3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_3$	$C_{18} \oplus C_6$
$\begin{pmatrix} 2^2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 12$ $d_2 = 3$ $d_3 = 3$	$\{2^2; 3; 3; 3\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$C_{12} \oplus C_3 \oplus C_3$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 6$ $d_2 = 6$ $d_3 = 3$	$\{2; 2; 3; 3; 3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$C_6 \oplus C_6 \oplus C_3$

Tabla 1: Grupos abelianos de orden 108.

Veamos cuáles son. Por el Teorema de Dyck, construir estos automorfismos basta con enviar un generador de C_{16} a otro generador. Los generadores de C_{16} son los elementos de orden 16, que son aquellos que son coprimos con 16.

$$C_16 = \langle x \rangle = \langle x^3 \rangle = \langle x^5 \rangle = \langle x^7 \rangle = \langle x^9 \rangle = \langle x^{11} \rangle = \langle x^{13} \rangle = \langle x^{15} \rangle$$

Por tanto, los automorfismos de C_{16} son:

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \varphi_1(x) = x \\
x &\mapsto \varphi_3(x) = x^3 \\
x &\mapsto \varphi_5(x) = x^5 \\
x &\mapsto \varphi_7(x) = x^7 \\
x &\mapsto \varphi_9(x) = x^9 \\
x &\mapsto \varphi_{11}(x) = x^{11} \\
x &\mapsto \varphi_{13}(x) = x^{13} \\
x &\mapsto \varphi_{15}(x) = x^{15}
\end{aligned}$$

Veamos que $\mathrm{Aut}(C_{16})$ es abeliano. Dados $\varphi_i, \varphi_j \in \mathrm{Aut}(C_{16})$, tenemos que:

$$(\varphi_i \circ \varphi_j)(x) = \varphi_i(\varphi_j(x)) = \varphi_i(x^j) = x^{ij} = x^{ji} = \varphi_j(\varphi_i(x)) = (\varphi_j \circ \varphi_i)(x)$$

Por tanto, como la composición conmuta para un generador de C_{16}, se cumple:

$$\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i \qquad \forall \varphi_i, \varphi_j \in \mathrm{Aut}(C_{16})$$

Por tanto, $\mathrm{Aut}(C_{16})$ es abeliano. Por la estructura de los grupos finitos abelianos, tenemos que hay dos posibilidades:

$$\mathrm{Aut}(C_{16}) \cong C_8 \qquad \vee \qquad \mathrm{Aut}(C_{16}) \cong C_4 \oplus C_2 \qquad \vee \qquad \mathrm{Aut}(C_{16}) \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$$

Para determinar la correcta, hemos de razonar por órdenes. Los órdenes de los elementos de $C_8 \cong \mathbb{Z}_8$ son:

$$O(0) = 1, \quad O(1) = O(3) = O(5) = O(7) = 8, \quad O(2) = O(6) = 4, \quad O(4) = 2$$

Los órdenes de los elementos de $C_4 \oplus C_2 \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ son:

$$O(0,0) = 1, \quad O(1,0) = O(3,0) = O(1,1) = O(3,1) = 4, \quad O(2,0) = O(1,0) = O(2,1) = 2$$

Los órdenes de los elementos de $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ son:

$$O(0,0,0) = 1, \quad O(x,y,z) = 2 \qquad \forall (x,y,z) \in {\mathbb{Z}_{\not\models}}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

Para determinar cuál es la correcta, hemos de ver qué órdenes tienen los elementos de $\operatorname{Aut}(C_{16})$. No es necesario calcular el orden de todos los elementos, sino que nos basta con ver cuántos tienen orden 2:

$$(\varphi_i \circ \varphi_i)(x) = \varphi_i(\varphi_i(x)) = \varphi_i(x^i) = x^{i^2}$$

Por tanto, tenemos que φ_i tiene orden 2 si y solo si $i^2 \equiv 1 \mod 16$, es decir, si y solo si $i \in \{7, 9, 15\}$. Por tanto, hay 3 elementos de orden 2 en $\operatorname{Aut}(C_{16})$. Además:

$$(\varphi_3 \circ \varphi_3)(x) = \varphi_3(x^3) = x^{3^2} = x^9 \neq x \Longrightarrow O(\varphi_3) \neq 2$$

De aquí, deducimos que la descomposición cíclica (y cíclica primaria) de $\operatorname{Aut}(C_{16})$ es:

$$\operatorname{Aut}(C_{16}) \cong C_4 \oplus C_2$$

Ejercicio 2.

1. (0,5 puntos) Sea $\alpha = (2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) \in S_5$. Calcula α^{123}.

   Hallamos la descomposición de α en ciclos disjuntos:

   $$\alpha = (2\,3\,4)(1\,2\,3) = (1\,3)(2\,4) \Longrightarrow O(\alpha) = \operatorname{mcm}(O(1\,3), O(2\,4)) = \operatorname{mcm}(2,2) = 2$$

   Por tanto:

   $$\alpha^{123} = \alpha = (1\ 3)(2\ 4)$$

2. (1,5 puntos) Calcula el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5.

   Sabemos que $|S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Notando por n_3 el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\begin{aligned} n_3 &\equiv 1 \mod 3 \\ n_3 &\mid 2^3 \cdot 5 = 40 \end{aligned}$$

Como n_3 es un divisor de 40, sus posibles valores son:

$$n_3 \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

Como además $n_3 \equiv 1 \mod 3$, tenemos que:

$$n_3 \in \{1, 4, 10, 40\}$$

Sea $P_3 \in \mathrm{Syl}_3(S_5)$ un 3-subgrupo de Sylow de S_5. Por tanto, $|P_3| = 3$, luego P_3 es cíclico y contiene dos elementos de orden 3. Los únicos elementos de orden 3 en S_5 son los ciclos de longitud 3; veamos cuántos hay:

$$\text{Número de ciclos de longitud } 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = 20$$

Cada elemento de orden 3 pertenece a un $3-$subgrupo de Sylow de S_5, ya que cualquier otro subconjunto de S_5 no va a tener cardinal múltiplo de 3. Además, dados dos 3-subgrupos de Sylow distintos, tienen que tener intersección trivial, ya que si no, tendrían un elemento de orden 3 en común, y por tanto serían el mismo subgrupo.

Por tanto, cada 3-subgrupo de Sylow de S_5 contiene exactamente dos elementos de orden 3, y como hay 20 elementos de orden 3, tenemos que:

$$n_3 = \frac{20}{2} = 10$$

Por tanto, el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5 es 10.

Ejercicio 3.

1. (2 puntos) Demuestra que hay un único grupo de orden 885 que además es abeliano.

   Sea G un grupo de orden 885. Notamos que:

   $$885 = 3 \cdot 5 \cdot 59$$

   Calculamos el número de subgrupos de Sylow de G, notando por n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{lcl} n_3 & \equiv & 1 \mod 3 \\ n_3 & \mid & 5 \cdot 59 = 295 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 \in \{1, \cancel{5}, \cancel{59}, 295\}$$

   De nuevo, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{lcl} n_5 & \equiv & 1 \mod 5 \\ n_5 & \mid & 3 \cdot 59 = 177 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_5 \in \{1, \cancel{3}, \cancel{59}, \cancel{177}\}$$

   Por tanto, $n_5 = 1$, luego existe un único 5-subgrupo de Sylow de G, que denotamos por P_5, que además es normal en G ($P_5 \lhd G$). Como $|P_5| = 5$, tenemos que $P_5 \cong C_5$.

Por último, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} n_{59} & \equiv & 1 \mod 59 \\ n_{59} & | & 3 \cdot 5 = 15 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{59} = 1$$

Por tanto, existe un único 59-subgrupo de Sylow de G, que denotamos por P_{59}, que además es normal en G ($P_{59} \lhd G$). Como $|P_{59}| = 59$, tenemos que $P_{59} \cong C_{59}$.

Tenemos que $P_{59} \cap P_5 = \{1\}$. Como $P_5 \lhd G$, por el Segundo Teorema de Isomorfía, $P_5 P_{59} < G$, con:

$$\frac{P_5 P_{59}}{P_5} \cong \frac{P_{59}}{P_5 \cap P_{59}} \Longrightarrow |P_5 P_{59}| = |P_5| \cdot |P_{59}| = 5 \cdot 59 = 295$$

Sean n'_p el número de p-subgrupos de Sylow de $P_5 P_{59}$. Por el mismo razonamiento que antes, tenemos que $n'_5 = 1 = n'_{59} = 1$, luego $P_5 P_{59}$ tiene un único 5-subgrupo de Sylow (P_5) y un único 59-subgrupo de Sylow (P_{59}). Por tanto:

$$P_5 P_{59} \cong C_5 \oplus C_{59} \cong C_{295}$$

Veamos que $P_5 P_{59} \lhd G$. Sea $g \in G$ y $xy \in P_5 P_{59}$, con $x \in P_5$ y $y \in P_{59}$. Entonces:

$$gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} \in P_5 P_{59}$$

donde hemos empleado que $P_5 \lhd G$ y $P_{59} \lhd G$. Por tanto, $P_5 P_{59} \lhd G$. Tenemos que:

- $P_5 P_{59} \lhd G$.
- $P_3 \cap P_5 P_{59} = \{1\}$, puesto que $P_5 P_{59}$ no tiene elementos de orden 3 puesto que $3 \nmid 5 \cdot 59$.
- Por el Segundo Teorema de Isomorfía, tenemos que:

  $$\frac{P_3}{P_3 \cap P_5 P_{59}} \cong \frac{P_3 P_5 P_{59}}{P_5 P_{59}} \Longrightarrow |P_3 P_5 P_{59}| = |P_3| \cdot |P_5 P_{59}| = 3 \cdot 5 \cdot 59 = 885$$

  Por tanto, $P_3 P_5 P_{59} = G$.

Por tanto, $G \cong P_5 P_{59} \rtimes_\theta P_3$, donde:

$$\begin{array}{rccl} \theta : & P_3 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(P_5 P_{59}) \\ & x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \theta(x) : & P_5 P_{59} & \longrightarrow & P_5 P_{59} \\ & y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

Veamos ahora cuántos productos semidirectos hay. Para ello, hemos de encontrar homomorfismos $\theta : P_3 \to \mathrm{Aut}(P_5P_{59})$. Notamos que:

$$P_3 \cong C_3 \Longrightarrow \exists x \in P_3 \text{ tal que } P_3 = \langle x \mid x^3 = 1\rangle$$
$$P_5P_{59} \cong C_{295} \Longrightarrow \exists y \in P_5P_{59} \text{ tal que } P_5P_{59} = \langle y \mid y^{295} = 1\rangle$$

Veamos en primer lugar cuántos automorfismos tiene P_5P_{59}. Por el Teorema de Dyck, dar un automorfismo de P_5P_{59} equivale a dar la imagen del generador, garantizando que esta imagen es un generador. Calculamos cuántos generadores tiene $P_5P_{59} \cong C_{295}$:

$$\varphi(295) = \varphi(5 \cdot 59) = \varphi(5) \cdot \varphi(59) = (5-1)(59-1) = 4 \cdot 58 = 232$$

Por tanto, $|\,\mathrm{Aut}(P_5P_{59})| = 232$. Como $O(x) = 3$, tenemos que $O(\theta(x)) \mid 3$, luego $O(\theta(x)) \in \{1, 3\}$.

- Supongamos que $O(\theta(x)) = 3$. Entonces, como el orden de todo elemento divide al orden del grupo, tenemos que:

  $$3 \mid 232$$

  No obstante, esto no es cierto, luego llegamos a una contradicción.

Por tanto, $O(\theta(x)) = 1$, luego $\theta(x)$ es el automorfismo identidad. Por tanto, θ es el homomorfismo trivial. Por tanto, como $G \cong P_5P_{59} \rtimes_\theta P_3$ y θ es el homomorfismo trivial, tenemos que:

$$G \cong P_5P_{59} \times P_3 \cong C_{295} \times C_3 \cong C_{885}$$

Por tanto, hay un único grupo de orden 885 que además es abeliano, que es el grupo cíclico C_{885}.

2. (1,5 puntos) Demuestra que todo grupo de orden 351 es un producto semidirecto.

   Sea G un grupo de orden 351. Notamos que:

   $$351 = 3^3 \cdot 13$$

   Sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{rcl} n_3 & \equiv & 1 \mod 3 \\ n_3 & \mid & 13 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 \in \{1, 13\}$$

   De nuevo, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{rcl} n_{13} & \equiv & 1 \mod 13 \\ n_{13} & \mid & 3^3 = 27 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{13} \in \{1, \cancel{3}, \cancel{9}, 27\}$$

   Supongamos que $n_3 = 13$ y $n_{13} = 27$. Como $n_{13} = 27$, hay 27 13-subgrupos de Sylow de G, que por ser de orden primo son cíclicos, y por tanto tienen 12 elementos de orden 13. Además, fijados dos 13-subgrupos de Sylow distintos, tienen intersección trivial, ya que si no, tendrían un elemento de orden 13 en común, y por tanto serían el mismo subgrupo. Por tanto, hay $27 \cdot 12 = 324$ elementos de orden 13 en G.

Por otro lado, como $n_3 = 13$, hay 13 3-subgrupos de Sylow de G, pero no tenemos garantizado que tengan intersección trivial. No obstante, cada uno tiene al menos 26 elementos de orden 3, 9 o 27. Por tanto, hay al menos 26 elemenos nuevos en G. Como hay más de un 3-subgrupo de Sylow, tenemos que hay algún elemento de orden 3, 9 o 27 más, luego hay más de 26 elementos de orden 3, 9 o 27. Por tanto:

$$|G| = 351 > 324 + 26 + 1 = 351$$

Hemos llegado a una contradicción, luego no puede ser que $n_3 = 13$ y $n_{13} = 27$ simultáneamente. Por tanto, tenemos que $n_3 = 1$ o $n_{13} = 1$.

- Si $n_3 = 1$, entonces existe un único 3-subgrupo de Sylow de G, que denotamos por P_3, que además es normal en G ($P_3 \lhd G$). Sea además $P_13 \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$ un 13-subgrupo de Sylow de G.
  - $P_3 \lhd G$.
  - Razonando por órdenes, vemos que $P_3 \cap P_{13} = \{1\}$, ya que P_3 no tiene elementos de orden 13 y P_{13} no tiene elementos de orden múltiplo de 3.
  - Por el Segundo Teorema de Isomorfía, tenemos que:

    $$\frac{P_{13}}{P_3 \cap P_{13}} \cong \frac{P_{13}P_3}{P_3} \Longrightarrow |P_{13}P_3| = |P_{13}| \cdot |P_3| = 13 \cdot 3^3 = 351$$

    Por tanto, $P_{13}P_3 = G$.

  Por tanto, $G \cong P_3 \rtimes_\theta P_{13}$, donde:

  $$\begin{array}{rccc} \theta: & P_{13} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(P_3) \\ & x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$$

  $$\begin{array}{rccc} \theta(x): & P_3 & \longrightarrow & P_3 \\ & y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

- Si $n_{13} = 1$, entonces existe un único 13-subgrupo de Sylow de G, que denotamos por P_{13}, que además es normal en G ($P_{13} \lhd G$). Sea además $P_3 \in \mathrm{Syl}_3(G)$ un 3-subgrupo de Sylow de G.
  - $P_{13} \lhd G$.
  - Razonando por órdenes, vemos que $P_{13} \cap P_3 = \{1\}$, ya que P_{13} no tiene elementos de orden múltiplo de 3 y P_3 no tiene elementos de orden 13.
  - Por el Segundo Teorema de Isomorfía, tenemos que:

    $$\frac{P_3}{P_{13} \cap P_3} \cong \frac{P_3P_{13}}{P_{13}} \Longrightarrow |P_3P_{13}| = |P_3| \cdot |P_{13}| = 3^3 \cdot 13 = 351$$

    Por tanto, $P_3P_{13} = G$.

Por tanto, $G \cong P_{13} \rtimes_\theta P_3$, donde:

$$\begin{array}{rccc} \theta: & P_3 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(P_{13}) \\ & x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \theta(x): & P_{13} & \longrightarrow & P_{13} \\ & y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

3. (1,5 puntos) Calcula todos los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$. ¿Cuántos hay salvo isomorfismo?

Tenemos que:

$$C_{13} = \langle x \mid x^{13} = 1 \rangle$$
$$C_{27} = \langle y \mid y^{27} = 1 \rangle$$

Dar un producto semidirecto $C_{13} \rtimes C_{27}$ equivale a dar un homomorfismo de la forma $\theta : C_{27} \to \mathrm{Aut}(C_{13})$.

Veamos en primer lugar cuántos automorfismos tiene C_{13}. Por el Teorema de Dyck, dar un automorfismo de C_{13} equivale a dar la imagen del generador, garantizando que esta imagen es un generador. Calculamos cuántos generadores tiene C_{13}:

$$\varphi(13) = 13 - 1 = 12$$

Por tanto, $|\,\mathrm{Aut}(C_{13})| = 12$. Para cada $i \in \{1, \dots, 12\}$, consideramos:

$$\begin{array}{c} \varphi_i : C_{13} \to C_{13} \\ x \mapsto x^i \end{array}$$

De esta forma, tenemos que $\mathrm{Aut}(C_{13}) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{12}\}$. De estos 12, veamos cuáles nos sirven. Dar un homomorfismo $\theta : C_{27} \to \mathrm{Aut}(C_{13})$ equivale a dar la imagen del generador $y \in C_{27}$. Como $O(y) = 27$, tenemos que $O(\theta(y)) \mid 27$, luego $O(\theta(y)) \in \{1, 3, 9, 27\}$. Además, puesto que $|\,\mathrm{Aut}(C_{13})| = 12$, descartamos los automorfismos de orden 9 y 27. Por tanto, hemos de ver cuáles de los automorfismos φ_i tienen orden 1 o 3.

- Si $O(\theta(y)) = 1$, entonces $\theta(y) = \varphi_1$.
- Si $O(\theta(y)) = 3$, entonces:

$$x = \varphi_i^3(x) = \varphi_i(\varphi_i(\varphi_i(x))) = x^{i^3} \Longrightarrow i^3 \equiv 1 \mod 13 \Longrightarrow i \in \{3, 9\}$$

Por tanto, los automorfismos que nos sirven son:

a) $\theta(y) = \varphi_1 = Id$.
En este caso, el producto semidirecto es el producto directo:

$$C_{13} \rtimes_\theta C_{27} \cong C_{13} \times C_{27} \cong C_{351}$$

b) $\theta(y) = \varphi_3$.
En este caso, tenemos que:

$$yxy^{-1} = \varphi_3(x) = x^3$$

Por tanto:

$$C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27} \cong \langle x, y \mid x^{13} = 1, y^{27} = 1, yxy^{-1} = x^3 \rangle \cong C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27}$$

c) $\theta(y) = \varphi_9$.
En este caso, tenemos que:

$$yxy^{-1} = \varphi_9(x) = x^9$$

Por tanto:

$$C_{13} \rtimes_{\varphi_9} C_{27} \cong \langle x, y \mid x^{13} = 1, y^{27} = 1, yxy^{-1} = x^9 \rangle$$

Veamos ahora que $C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27}$ y $C_{13} \rtimes_{\varphi_9} C_{27}$ son isomorfos entre sí. Como x, y^2 son generadores de C_{13} y C_{27} respectivamente, tenemos que:

$$C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27} = \langle x, y^2 \rangle$$

Sea $\varphi : C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27} \to C_{13} \rtimes_{\varphi_9} C_{27}$ el homomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x \\ \varphi(y) &= y^2 \end{aligned}$$

Veamos que x, y^2 cumplen con las relaciones del grupo $C_{13} \rtimes_{\varphi_9} C_{27}$:

$$\begin{aligned} \varphi(x)^{13} &= x^{13} = 1 \\ \varphi(y)^{27} &= (y^2)^{27} = (y^{27})^2 = 1^2 = 1 \\ \varphi(y)\varphi(x)\varphi(y)^{-1} &= y^2x(y^2)^{-1} = yx^3y^{-1} = x^3yx^2y^{-1} = x^6yxy^{-1} = x^9 = \varphi(x)^2 \end{aligned}$$

Por el Teorema de Dyck, como x, y^2 cumplen con las relaciones del grupo $C_{13} \rtimes_{\varphi_9} C_{27}$, y son un generador, es sobreyectiva. Además, como el cardinal de $C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27}$ no depende del homomorfismo, tenemos que es inyectiva. Por tanto, φ es un isomorfismo, luego:

$$C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27} \cong C_{13} \rtimes_{\varphi_9} C_{27}$$

Por tanto, los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$, salvo isomorfismo, son:

$$\begin{aligned} &C_{13} \rtimes_{\varphi_1} C_{27} \cong C_{351} \\ &C_{13} \rtimes_{\varphi_3} C_{27} \cong \left\langle x, y \mid x^{13} = 1, y^{27} = 1, yxy^{-1} = x^3 \right\rangle \end{aligned}$$